Title	二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムの効率解析 : ElYaniv-Fiat-Karp-Turpin法における予想外相場変動時の場合(最適化の数理における離散と連続構造)
Author(s)	壇浦, 詠介; 櫻井, 幸一
Citation	数理解析研究所講究録 (1996), 945: 204-211
Issue Date	1996-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/60208
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 204-211

二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムの効率解析
− ElYaniv-Fiat-Karp-Turpin 法 における予想外相場変動時の場合−

檀浦 詠介　　　　櫻井 幸一
Eisuke DANNOURA　Kouichi SAKURAI
{dannoura,sakurai}@csce.kyushu-u.ac.jp
九州大学工学部情報工学科

1995 年 11 月 8 日

1 はじめに

これまで様々な経済問題に対するオンラインアルゴリズムが考案されてきたが [Cov91, Ragh91]、これらは敵 (相場の変動) に対して何らかの制限を設けることでオンラインアルゴリズムが実現されている。

Karp [EFKT92] によって二通貨間為替交換問題における優れたオンラインアルゴリズムが 3 つのモデルにおいて提案されている。これらはいずれも円相場 x(¥/ $) の値が増加している区間と減少している区間に分割し、増加している区間では $→¥、減少している区間では ¥→ $ という方向に取引を行なう単一方向取引アルゴリズムを各々の区間毎に適用し、それを繰り返すという操作により実現されている。

Karp の 3 つのモデルの内の 2 つでは、相場の上下限があり、かつそれが知られているという設定での離散的、及び連続的なモデルにおける単一方向取引アルゴリズムを実現している。これらを実用しようとする際にはその上下限を仮定することになるが、今日の為替市場を見ると、そのような上下限を仮定することがはたして適当であるか疑問である。また、もう 1 つのモデルは、相場の上下限があるものの、その上下限の比の値しかわかっていないという設定での離散的モデルになっている。しかし、いずれのモデルも仮定が崩壊した場合、アルゴリズムは意図した結果が得られないことになる。このような仮定崩壊時に得られる結果に関する記述は、上下限が知られている離散的モデルに関しては若干の記述がなされている。

これまでに我々は Karp の上下限が知られている連続的なモデルに注目し、仮定された相場変動範囲を越えて実際の変動が生じた場合の実行結果への影響を調べた [DS95]。さらに、ここでは実現されていない、上下限の比が知られている連続的なモデルでの単一方向取引アルゴリズムの構築を実現したのでこれを示す。

2 オンラインアルゴリズムとは

2.1 オンラインアルゴリズムとオフラインアルゴリズム

オンラインアルゴリズムとは外部から連続した要求を受けとり、各々に対して瞬時に反応するアルゴリズムである。これに対してオフラインアルゴリズムとは、あらかじめ全ての要求を受けとった上で、その要求全体に基づいて反応を起こすアルゴリズムである。[Karp92]

言い換えればオフラインアルゴリズムとは、未来の情報を得た上で反応するアルゴリズムである。当然オフラインアルゴリズムの方が、未来の情報を得ているため、より良い結果を得ることが可能であるが、現実にはオンラインアルゴリズムのように、未来の情報がない状態で判断しなければならないことがほとんどである。そこでこれまで、オペレーティングシステムや金融取引などの現実の事象をモデル化し、それに対して有効なオンラインアルゴリズムを構築するための研究が行なわれてきた [EFKT92, CCEK95, Ragh91, Cov91]。

2.2 オンラインアルゴリズムの competitive ratio

オンラインアルゴリズムの評価方法として competitive ratio と呼ばれるものがある [KMRS88]。これは、期間 T において得られた情報を基に何らかのコストがかかる行動をとる時に、オフラインアルゴリズムによる最適な行動の結果生じるコストを C_{OPT}、X というオンラインアルゴリズムを用いた結果を C_X とする。このとき $sup_T \frac{C_X(T)}{C_{OPT}(T)}$ を X の competitive ratio とし、それをどれだけ 1 に近付けることができるかでそのアルゴリズムの良さを表わすというものである。

2.3 スキー板レンタルアルゴリズム

competitive ratio を用いたオンラインアルゴリズムの簡単な例として、スキー板のレンタル問題がある。[Karp92] これを以下に説明する。

スキー板をレンタルするのに必要なコストを 1, 買うのに必要なコストを s とし、プレイヤーがこの先何回スキーにいくのか分からないものとする。このような状況で何回目まではレンタルして、何回目にスキー板を買うべきかを考える。

プレイヤーがこの先スキーにいく回数を t,$(t = 1, 2, \cdots)$ とする。このときの最適なオフラインアルゴリズムを以下に示す。

$$\begin{cases} t \geq s & 1\text{回目にスキー板を買う} \\ t < s & \text{毎回レンタルする} \end{cases}$$

ゆえにオフラインアルゴリズムのコストは $min[s, t]$ となる。

これに対して、あるオンラインアルゴリズムは k 回目までレンタルし、$k + 1$ 回目に買うものとする。このときのこのアルゴリズムのコストは以下のようになる。

$$\begin{cases} t \leq k & t \\ t \geq k + 1 & k + s \end{cases}$$

このとき k をどのような値に設定すればこのアルゴリズムの competitive ratio が最小になるかを考える。

オンラインアルゴリズムのコストとオフラインアルゴリズムのコストの比が最大になるのは $t = k + 1$ のとき (スキー板を買って以降スキーに行かなかった場合) なので、competitive ratio は $\frac{k+s}{min[k+1,s]}$ となる。s が整数であるとすれば、competitive ratio は $k = s - 1$ のときに最小値 $\frac{2s-1}{s}$ をとる。これにより、s 回目にスキー板を買うのが最適なオンラインアルゴリズムであるということがわかる。

3 オンラインアルゴリズムの応用

オンラインアルゴリズムは、未来の情報がない状態で、即決断しなければならないような状況が生じる様々な問題に対して応用されている。タスクシステム [BLS92], ロボット操縦 [BRS91, FFKRRV91, PY91] がこうした例である。

経済ゲームにおいて、オンラインアルゴリズムを competitive ratio を用いて評価している最初の仕事は Cover[Cov91] であると Karp[EFKT92] は論じている。

文献 [Cov91] では株式投資におけるポートフォリオ選択問題を取り扱っている。ここでは株式市場における複数の証券に対してどのように投資を分散させればよいかを示す簡単なオンラインアルゴリズムを示している。また、文献 [Ragh91] では統計的な敵 (価格の変動) に対するオンラインの投資アルゴリズムを解析している。いずれの文献も価格変動に関して制限が設けられている。

文献 [EFKT92] では、円相場変動に関する仮定のもとで、有界な competitive ratio を達成するオンラインアルゴリズムを設計している。文献 [EK93] では、土地抵当問題に対して competitive ratio に基づきオンラインアルゴリズムの設計・評価を行なっている。

4 Karpによる二通貨間為替交換アルゴリズム

Karpの二通貨間為替交換アルゴリズムとは、円相場x(¥/＄)の値が増加している区間と減少している区間に分割し、増加している区間では＄→¥、減少している区間では¥→＄という方向に取引を行なう単一方向取引アルゴリズムを各々の区間毎に適用し、それを繰り返すという操作により実現されている。

Karpによる単一方向取引アルゴリズムは以下の3つのモデルのもとで実現されている。

1. 相場の上下限が知られている連続的モデル
2. 相場の上下限が知られている離散的モデル
3. 相場の上下限の比だけが知られている離散的モデル

これまでに我々の研究では(1)のモデルを採用し、仮定崩壊時の解析を行なった[DS95]。

4.1 二通貨間為替交換問題の連続的モデル

取引を行なう期間$[0,T]$において、円相場$x(m \le x \le M)$は時刻$t(t \in [0,T])$の関数として表わされ、$[0,T]$内の任意の時刻において取引可能である。ただし、関数$x(t)$には不連続点が存在し得るものとする。つまり、不連続点の発生に反応して取引を行なう場合、不連続点の発生した後の相場で取引は行なわれる。これは、現実世界においては急激な相場の変動に対して反応するのが間に合わないことが十分あり得るので、それを考えに入れたものである。(図1参照)

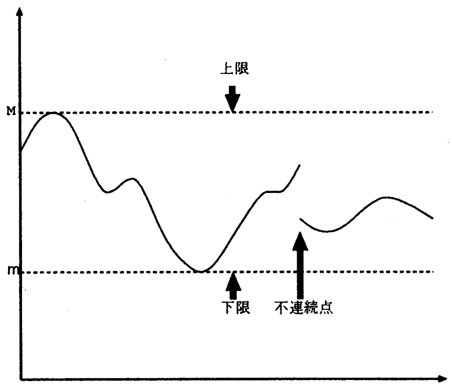

図1

Karpのアルゴリズムは、アルゴリズムを実行する期間を、相場が増加している区間と減少している区間に分割し、それぞれの区間に対して以下に示す単一方向為替取引アルゴリズムを適用し、交換を行なうというものである。

Karpの単一方向為替取引アルゴリズムとは、円相場関数x(円／ドル)が増加している（ドルの価値が上がっている）区間ではドルを円に、減少している（円の価値が上がっている）区間では円をドルに、といういずれか一方向への取引のみを行なうアルゴリズムである。この二つの方向への取引をそれぞれ交互に繰り返して適用することでKarpの双方向の為替交換アルゴリズムは実現されている。

4.2 Karpによる単一方向為替取引アルゴリズム

ある一定期間Tにおいて、単一方向への取引を行なう(円売ドル買か円買ドル売のいずれかしか行なわない)ケースを考える。この際に、ある入力(相場の変動)に対して最適な取引を行なった結果得られる金額を$P_{OPT}(T)$、Aというオンラインアルゴリズムを用いた結果得られる金額をを$P_A(T)$とする。このとき$sup_T \frac{P_{OPT}(T)}{P_A(T)}$を$A$のcompetitive ratioと定義し、これを最小とするようにこのアルゴリズムは構築されている。

時刻t（$t \in [0,T]$）における円相場を$x(t)$（$m \le x(t) \le M$）、任意のt_1,t_2（$t_1 \le t_2 < T$）において$x(t_1) \le x(t_2)$を示すものとする。$t_2 = T$の場合を含まないのは、時刻Tにおいて不連続点が発生し、それによって単調増加区間が終了するケースがあり得るからである。また、m, Mおよび$x(0)$（$= a$）は知られているものとし、この3つの値から区間ごとにRという値を定め、各区間において$P_{OPT}(T)/P_A(T)$がR以下になるように取引を行なう。Rの定義は以下の通りである。

$$R = \begin{cases} r & a \in [m, rm] \\ 1 + \frac{a-m}{a} \ln \frac{M-m}{a-m} \ (\le r) & a \in [rm, M] \end{cases} \quad (r = \ln \frac{\frac{M}{m} - 1}{r - 1})$$

これは、相場 x が a から M まで連続的に単調増加した場合 $x=M$ のときにちょうどドルがなくなるように定めたものである。R の最大値は r なので、このアルゴリズムは1区間ごとに r という competitive ratio を保証する。

このアルゴリズムは以下に示すルールに従って取引を行なう。以下の記述はドルから円への交換の場合である。相場が x の時のドルの額を $D(x)$、円の額を $Y(x)$ とし、初期値を $D=1, Y=0$ とする。

Rule

1. 終了時には残っているドルを全て円に交換する
2. (1) のケース以外では、それまでよりも相場が上昇した場合に取引を行なう
3. (2) の条件で取引を行なう場合は、相場の変化に応じて以下の金額を所持するように円を買う

相場が連続的に増加している場合

Case.1 $a \in [m, rm]$

$$\begin{cases} x \in [a, rm] & D(x) = 1 \\ & Y(x) = 0 \\ x \in [rm, M] & D(x) = 1 - \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{x-m}{rm-m} \\ & Y(x) = \dfrac{x}{r} - m(1 - \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{x-m}{rm-m}) \end{cases}$$

Case.2 $a \in [rm, M]$

$$\begin{cases} x = a & D(a) = \dfrac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} \\ & Y(a) = \dfrac{a(\frac{a}{R}-m)}{a-m} \\ x \in [a, M] & D(x) = \dfrac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} - \dfrac{1}{R} \ln \dfrac{x-m}{a-m} \\ & Y(x) = \dfrac{x}{R} - m\left\{\dfrac{a(1-\frac{1}{R})}{a-m} - \dfrac{1}{R} \ln \dfrac{x-m}{a-m}\right\} \end{cases}$$

以下にこれらの式の考え方を示す。

相場が x の時点で、ドルは $D(x)$、円は $Y(x)$ 存在する。その時点で最悪でも $mD(x)+Y(x)$ の円を得ることができる。最適な取引により得られる円の額は x なので、$mD(x)+Y(x)=x/R$ を満たすように取引をおこなえばよい。また、$xD'(x)=-Y'(x)$ がなりたつので、この二つの式から微分方程式を解くことで上のアルゴリズムで示す式が得られる。ただし、$x<rm$ においては $mD(x)+Y(x)>x/R$ が常に成り立つので取引は行なわれない。

また、途中で不連続点が発生し、その前後で相場が増加した場合は、そのたびに $mD(x)+Y(x)=x/R$ にしたがって式の修正を行なうことが望ましいが、修正しなくてもドルと円のいずれか一方の式に従って操作を行なえば、もう一方の通貨は与式よりも大きな額を得ることができるのでここでは省略する。

5 制限範囲外を相場が変動した際の Competitive Ratio

[EFKT92] の中で、離散的モデルにおいて、仮定した上限を越えた変動が発生した場合の competitive ratio について触れられている。今回我々は、このような状況に注目し、連続的モデルにおいて仮定が崩壊した場合にどのような結果が得られるかについて解析を行なった。ただし、以下の解析は、仮定崩壊後もプレイヤーは上下限を設定し直すことはないものとしている。

定理. 相場の変動範囲が、アルゴリズム内で仮定された範囲 $[m, M]$ を越えて、$x \in [m/\alpha, \beta M]$ $(\alpha, \beta \geq 1)$ に及んだとき (図2参照)、このアルゴリズムは以下のような competitive ratio を保証する。ただし、r は範囲を $[m, M]$ と仮定して、その仮定が正しかった場合の competitive ratio である。

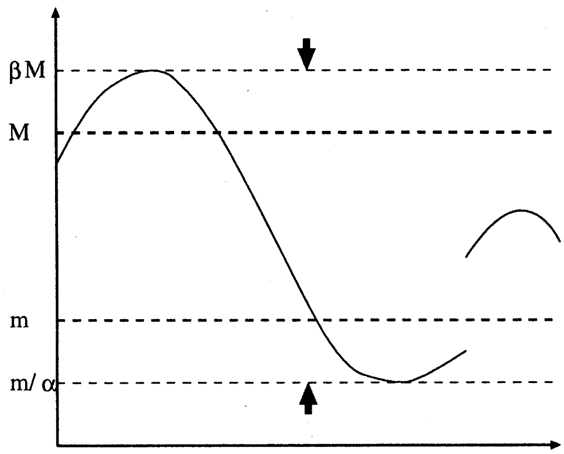

図2

1. 1区間 (増加区間 or 減少区間) において

$$max[\alpha r, \beta r]$$

2. 期間 $[0, T]$ 内に $2k$ 区間 (k の増加区間と k の減少区間) が存在し、$t = T$ において円相場関数 $x(t)$ が連続な場合

$$\alpha^k \beta^k r^{2k}$$

証明. まずは、このアルゴリズムが、仮定の範囲外でどのような動作を行なうかを示す。

$$\begin{cases} x \leq m & \text{終了時以外には操作を行なわない} \\ x \geq M & \text{全てのドルを円に変える} \end{cases}$$

これより、相場が a から b まで連続的に増加するケースを考える。最適な操作により得られる円の額は $Y = b$ である。また、$x = b$ で終了するので、competitive ratio は $b/\{bD(b) + Y(b)\}$ の最大値で表わすことができる。
次に、Karp のアルゴリズムで得られる金額を示す。$x \in [m/\alpha, rm], [rm, M], [M, \beta M]$ で動作が各々違ってくるので、a, b が各々どの範囲に当てはまるかによって場合分けして表す。
Case.1 $a \in [m/\alpha, rm]$

$$\begin{cases} b \in [a, rm] & D(b) = 1, Y(b) = 0 \text{ より } bD(b) + Y(b) = b \\ b \in [rm, M] & bD(b) + Y(b) \geq mD(b) + Y(b) = b/r \\ b \in [M, \beta M] & D(b) = D(M) = 0, Y(b) = Y(M) = M/r \\ & \text{より } bD(b) + Y(b) = M/r \end{cases}$$

Case.2 $a \in [rm, M]$

$$\begin{cases} b \in [a, M] & bD(b) + Y(b) \geq mD(b) + Y(b) = b/R \\ b \in [M, \beta M] & D(b) = D(M) = 0, Y(b) = Y(M) = M/R \\ & \text{より } bD(b) + Y(b) = M/R \end{cases}$$

Case.3 $a \in [M, \beta M]$

$$bD(b) + Y(b) = a$$

以上のことより competitive ratio は $b = \beta M$ のときに最大値 βr をとる。次に、相場が a から b まで連続的に増加し、b になった瞬間に不連続点が発生し、相場が $c(c \leq b)$ になるケースを考える。
最適な操作により得られる円の額は $Y = b$ である。また、$x = c$ で終了するので、competitive ratio は $b/\{cD(b) + Y(b)\}$ の最大値となる。

$$\begin{cases} b \in [m/\alpha, rm] & D(b) = 1, Y(b) = 0 \text{ より } cD(b) + Y(b) = c \\ b \in [rm, M] & cD(b) + Y(b) \geq c \\ b \in [M, \beta M] & D(b) = D(M) = 0, Y(b) = Y(M) = M/r \\ & \text{より } cD(b) + Y(b) = M/r \end{cases}$$

となり、c.r. は $max[\alpha r, \beta r]$ となる。
ここで、上限および下限が広がったことによりそれらが competitive ratio を大きくするのはどのようなケースであるかを考えると以下のようになる。
a. ドルがなくなった (x が M に達した) あとも相場が上昇した場合
(最適な取引により得られる結果が最大 β 倍になる)
b. ドルがなくならないうちに不連続点により相場が (m より小さい値まで) 暴落した場合
(実際に得られる結果が最大 α^{-1} になる)
また、この二つのケースが同じ区間内で共に発生することはあり得ない
(b のケースが発生したら、その時点でその区間が終了する)
このことより、1 の結果が導かれる。
ところが b のケースで αr という結果が出るためには不連続点によって相場が暴落しなければならないが、これは次の区間を optimal に近付けてしまう。
次の減少区間の competitive ratio は $c/(\alpha m)$ なので (逆方向のアルゴリズムにとっては c は上限を超えているから), 二区間での competitive ratio は αr^2 ということになるが、これよりは連続な場合の $\alpha\beta r^2$ の方が大きい。ゆえに 2 の結果が導かれる。 **(証明終)**

これは相場の変動範囲を $[m/\alpha, \beta M]$ と正しく仮定した場合の competitive ratio よりも大きくなり悪い結果となる。

6 上下限の比が知られているモデル

6.1 上下限の比が知られている離散的モデル

Karp[EFKT92] の中で、上下限の比だけが知られている離散的モデルにおける、単一方向取引アルゴリズムでの最適な competitive ratio が示されている。

上下限の比を Φ、アルゴリズムの適用日数を n としたとき、最適な competitive ratio は以下のようになる。

$$\Phi(1 - \frac{(\Phi - 1)^n}{(\Phi^{\frac{n}{n-1}} - 1)^{n-1}})$$

また、$n \to \infty$ のとき、この値は以下の値になる。

$$\Phi - (\Phi - 1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi - 1}}$$

6.2 上下限の比が知られている連続的モデル

今回我々は、相場の上下限の比だけが知られているという設定での単一方向取引アルゴリズムの設計を行なう。

各区間の上下限の比が $\Phi(\Phi > 1)$ であるとき、このアルゴリズムによって得られる各区間の competitive ratio を r とする。このとき r は以下の式で表される。

$$r = \Phi - (\Phi - 1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi - 1}}$$

これは離散的モデルで $n \to \infty$ のときの competitive ratio と一致する。

アルゴリズムを以下にしめす。ただし、初期条件を $D=1, Y=0$ とし、アルゴリズムを適用し始める瞬間の相場(最初の入力)を $x=a$ とする。

Rule

1. 終了時には残っているドルを全て円に交換する
2. (1) のケース以外では、それまでよりも相場が上昇した場合に取引を行なう
3. (2) の条件で取引を行なう場合は、相場の変化に応じて以下の金額を所持するように円を買う ($x=a$ の場合を含む)

$$\begin{cases} D(x)=\Phi\left\{\Phi-(\Phi-1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi-1}}\right\}^{-1}\left\{1-(\frac{x}{\Phi a})^{\frac{1}{\Phi-1}}\right\} \\ Y(x)=\left\{\Phi-(\Phi-1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi-1}}\right\}^{-1} x(\frac{x}{\Phi a})^{\frac{1}{\Phi-1}} \end{cases}$$

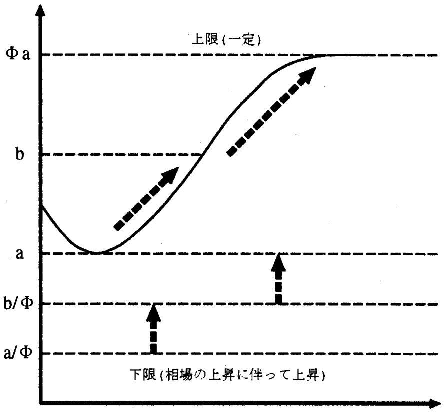

図 3

以下にこれらの式の導出を示す。相場の上下限を M, m ($\frac{M}{m}=\Phi$) とする。$x=a$ の時点で、$m\in[\frac{a}{\Phi}, a]$、$M\in[a, \Phi a]$ であることはわかる。それから x が増加するのにともなって $m\in[\frac{x}{\Phi}, a]$、$M\in[x, \Phi a]$ という範囲であることがわかる。つまり、このアルゴリズムは相場が x の時、$(m, M)=(\frac{x}{\Phi}, \Phi a)$ とみなして取引を行なう。(図 3 参照)

相場が x の時点で、ドルは $D(x)$、円は $Y(x)$ 存在する。ここで次の瞬間に起こり得る最悪な相場の変化は x から x/Φ となることである。このような相場の変動が発生した瞬間に、相場の増加区間が終了したことを認識するので、全てのドルを円に交換する。この結果得られる円の額は $\frac{x}{\Phi}D(x)+Y(x)$ である。最適な取引により得られる円の額は x なので、$\frac{x}{\Phi}D(x)+Y(x)=x/r$ を満たすように取引をおこなえばよい。また、$xD'(x)=-Y'(x)$ がなりたつので、この二つの式から微分方程式を解き、初期条件 $aD(a)+Y(a)=a$ を与えることで、以下の式が導かれる。

$$\begin{cases} D(x)=\frac{\Phi}{r}\left\{1-(\frac{x}{\Phi a})^{\frac{1}{\Phi-1}}\right\} \\ Y(x)=\frac{x}{r}(\frac{x}{\Phi a})^{\frac{1}{\Phi-1}} \end{cases}$$

次に、r を最小(最適)な値に定める。$x\in[a, \Phi a]$ において $D(x)\leq 0$ である必要がある。これを解くと、$r\geq\Phi-(\Phi-1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi-1}}$ という解が得られる。ゆえに $r=\Phi-(\Phi-1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi-1}}$ ($D(\Phi a)=0$ のとき等号成立) が最適な competitive ratio である。

また、途中で不連続点が発生し、その前後で x が増加した場合は、そのたびに $\frac{x}{\Phi}D(x)+Y(x)=x/r$ にしたがって式の修正をおこなうことが望ましいが、それを行なわなくても円とドルのいずれか一方の式にしたがって取引を行なえばもう一方の通貨は与式よりも大きな値が得られるので詳細は省略する。

6.3 上下限の比が知られている連続的モデルの仮定が崩壊した場合

上下限の比を Φ と仮定したが、実際は $\alpha\Phi$ であった場合の competitive ratio は以下のようになる。

$$\alpha\left\{\Phi-(\Phi-1)\Phi^{-\frac{1}{\Phi-1}}\right\}$$

つまり、他のモデルでの単一方向取引アルゴリズムと同様に、範囲の広がりに比例して大きくなる。

7 おわりに

今回の研究により、上下限の比が知られている連続的モデルのもとでのアルゴリズムを構築することができた。しかし [EFKT92] において、最適な単一方向アルゴリズムを設計しそれを繰り返しても、全体は最適なアルゴリズムとはならないことが記述されている。つまり、全体のアルゴリズムの competitive ratio はより小さ

くすることが可能である。そのようなアルゴリズムは [DS96] において実現されているのでそちらを参照して頂きたい。

参考文献

[BLS92] A.Borodin,N.Linial,and M.Saks. An optimal online algorithm for metrical task system. Journal of the ACM,39:745-763,1992.

[BRS91] A.Blum,P.Raghavan,and B.Schieber. Navigating in unfamiliar geometric terrain. In Proceeding of the 23rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 494-504,1991.

[Cov91] T.M.Cover. UNIVERSAL PORTFORIOS, In Journal of Mathematical Finance, Vol.1, No.1, pages1-29, January 1991.

[CCEK95] Andrew Chou, Jeremy Cooperstock, Ran El-Yaniv, Michael Klugerman and Tom Leighton. The Statistical Adversary Allows Optimal Money-Making Trading Strategies, In Proceeding of SODA'95,1995.

[DS95] 檀浦詠介, 櫻井幸一. オンライン為替交換アルゴリズムにおける予想外相場変動時の効率解析, 平成 7 年度電気関係学会九州支部連合大会,1157.Sep,1995.

[DS96] 檀浦詠介, 櫻井幸一. 二通貨間為替交換問題に対するオンラインアルゴリズムの設計と解析, 情報処理学会アルゴリズム研究会, Jan, 1996.

[EFKT92] R.El-Yaniv, A.Fiat, R.Karp and G.Turpin. Competitive Analysis of Financial Games, In Proceeding of the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science,pp.327-333,1992.

[EK93] Ran El-Yaniv and Richard M.Karp. The Mortgage Problem. Proceedings of the 2nd Israel Symposium on Theory and Computing Systems, 1993.

[FFKRRV91] A.Fiat,D.P.Foster,H.J.Karloff,Y.Rabani,Y.Ravid and S.Vishwanathan. Competitive algorithms for layered graph traversal. In Proceeding of the 32nd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science,pages 288-297,1991.

[Karp92] Richard M.Karp. On-Line Algorithms Versus Off-Line Algorithms: How Much is it Worth to know the Future?, In Proceeding of IFIP,1992.

[KMRS88] A.R.Karlin, M.S.Manasse, L.Rudolph, and D.D.Sleator. Competitive snoopy caching. Algorithmica,3(1):70-119,1988.

[PY91] C.H.Papadimitriou and M.Yanakakis. Shortest paths without a map. Theoretical Computer Science,84:127-150,1991.

[Ragh91] P.Raghavan. A statistical adversary for on-line algorithms. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 7;79-83, 1991.

[RS94] P.Raghavan and M.Snir.Memory versus randomization in on-line algorithms. IBM Journal of Research and Development,38:683-707,1994.